Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 2 4 1 4 0 2 1 2

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven
MATEMATIKA

Izpitna pola 2

B) Krajše strukturirane naloge
C) Strukturirane naloge

Sobota, 8. junij 2024 / 90 minut (45 + 45)

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, geometrijsko orodje (šestilo in ravnilo, lahko tudi trikotnik) in računalo.
Priloga s formulami in konceptna lista so na perforiranih listih, ki jih kandidat pazljivo iztrga.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani).

Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov, dela B in dela C. Časa za reševanje je 90 minut. Priporočamo vam, da za reševanje dela B porabite 45 minut, za reševanje dela C pa 45 minut.

Izpitna pola vsebuje 6 krajših strukturiranih nalog v delu B in 2 strukturirani nalogi v delu C. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 60, od tega 40 v delu B in 20 v delu C. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na straneh 3 in 4.

Rešitve pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom v izpitno polo v za to predvideni prostor **znotraj okvirja**. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani 15 in 20 sta rezervni; uporabite ju le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 20 strani, od tega 2 rezervni.

Formule

(**Vsota in razlika potenc z naravnim eksponentom**) Za poljubna $a,\ b \in \mathbb{R}$ in za poljubno naravno število n velja

$$\boxed{a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)},$$

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}.$$

(**Evklidov in višinski izrek**) Pravokotni trikotnik ima kateti a in b ter hipotenuzo c. Višina na hipotenuzo je v_c, pravokotna projekcija katete a na hipotenuzo je a_1, pravokotna projekcija katete b na hipotenuzo pa b_1. Tedaj velja $\boxed{a^2=ca_1,\ b^2=cb_1}$, $\boxed{v_c^2=a_1b_1}$.

(**Polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga**) Trikotnik ima stranice a, b in c, polovica obsega je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, ploščina je S, polmer danemu trikotniku včrtanega kroga je r in polmer danemu trikotniku očrtanega kroga je R. Tedaj je $\boxed{r=\dfrac{S}{s}}$ in $\boxed{R=\dfrac{abc}{4S}}$.

(**Heronova formula**) Trikotnik ima stranice a, b in c, polovica obsega je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Tedaj je njegova ploščina $\boxed{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

(**Ploščina trikotnika**) Naj bodo $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ in $C(x_3,\ y_3)$ točke v ravnini. Ploščina trikotnika z oglišči A, B in C je enaka $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$.

(**Krogla**) Površina in prostornina krogle s polmerom r sta $\boxed{P=4\pi r^2,\ V=\dfrac{4\pi r^3}{3}}$.

(**Razdalja točke od premice**) Naj bodo $a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ in naj a in b ne bosta oba enaka 0. Razdalja točke $T_0(x_0,\ y_0)$ od premice p, podane z enačbo $ax+by-c=0$, je

$$\boxed{d(T_0,\ p)=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

(**Logaritem**) Naj bosta $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$. Tedaj za vsak $x>0$ velja $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$.

(**Adicijski izreki**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y},\quad \boxed{\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}.$$

Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, za katera je $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ za poljuben $k\in\mathbb{Z}$ in $\tan x\tan y\neq -1$, velja $\boxed{\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}}$.

(**Kotne funkcije polovičnih kotov**) Za poljuben $x\in\mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}},\quad \boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Za poljuben $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+\pi\cdot 2k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ velja $\boxed{\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}$.

(**Faktorizacija vsote in razlike kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y\in\mathbb{R}$ velja

$$\boxed{\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}},$$

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}},$$

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}.$$

(**Razčlenitev produkta kotnih funkcij**) Za poljubna $x,\ y \in \mathbb{R}$ velja

$\boxed{\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))}$,

$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))}$,

$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))}$.

(**Elipsa**) Elipsa v ravnini ima polosi a in b $(a > b)$, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Hiperbola**) Hiperbola v ravnini ima realno polos a in imaginarno polos b, njena linearna ekscentričnost je e, njena numerična ekscentričnost je ε. Tedaj velja $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$.

(**Parabola**) Parabola v ravnini z enačbo $y^2 = 2px$ ima gorišče v $\boxed{G\left(\frac{p}{2},\ 0\right)}$, enačba premice vodnice dane parabole pa je $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

(**Aritmetično zaporedje**) Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja (a_n) je $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

(**Geometrijsko zaporedje**) Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja (a_n) s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ je $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$, če je $q \neq 1$, in $\boxed{S_n = na_1}$, če je $q = 1$.

(**Limiti**) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$ in $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.

(**Nedoločeni integral**) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj je za vsak $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$ in $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C}$.

(**Integracija po delih**) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Tedaj velja

$\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'}$.

(**Volumen rotacijskega telesa**) Naj bo $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Volumen telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, zavrtimo okrog abscisne osi za 360°, je $\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx}$.

(**Bernoullijeva formula**) Naj bo p verjetnost, da se v danem poskusu zgodi dogodek A. Verjetnost, da se dogodek A v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, je

$\boxed{P(n,\ p,\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

B) KRAJŠE STRUKTURIRANE NALOGE

1. Dani sta kvadratna funkcija $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ in linearna funkcija $g(x) = 2x - 4$. Izračunajte presečišči njunih grafov.

(6 točk)

2. Dopolnite preglednico 1 tako, da k izjavi zapišete 1, če je izjava resnična, in 0, če je izjava neresnična. Glejte prvo vrstico.

Izjava	Resničnost/neresničnost izjave
Praštevil je neskončno mnogo.	**1**
$(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$	
Za disjunktni končni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$, kjer je z $m(\mathcal{A})$ označena moč množice $\mathcal{A}$.	
Elementi potenčne množice so množice.	
Za kartezični produkt velja $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.	

Preglednica 1

Naj bo izjava F resnična (1), izjava G pa neresnična (0). Dopolnite preglednico 2 tako, da k sestavljeni izjavi zapišete 1, če je sestavljena izjava resnična, in 0, če je sestavljena izjava neresnična. Glejte prvi vrstici.

Izjava	Resničnost/neresničnost izjave
$\boldsymbol{F}$	**1**
$\boldsymbol{G}$	**0**
$F \wedge G$	
$F \vee G$	
$(F \wedge G) \Rightarrow (F \vee G)$	

Preglednica 2

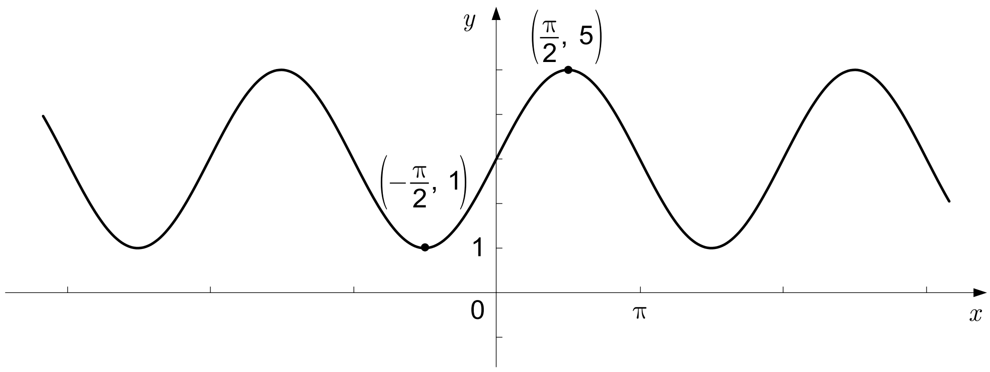
(7 točk)

3. Alja in Brina skupaj tehtata 99 kg, Brina in Zoja skupaj pa 107 kg. Če na tehtnico skupaj stopita Alja in Zoja, ta pokaže 110 kg. Koliko tehta vsaka od deklet? Zapišite odgovor.

(5 točk)

4. Rešite naslednji dve nalogi:

4.1. Na sliki je del grafa funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=A\sin x+C$, kjer sta $A, C\in\mathbb{R}$. Funkcija f ima lokalni maksimum $M=5$ in lokalni minimum $m=1$. Določite števili A in C.



(2)

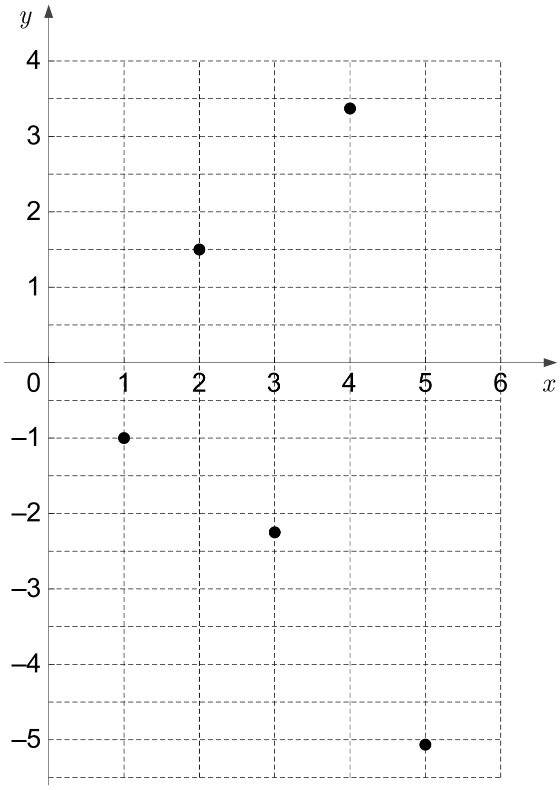
4.2. Dana je funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $g(x)=-2\sin x+1$. Izračunajte vsa presečišča grafa funkcije g in premice z enačbo $y=2$.

(5)
(7 točk)

5. V koordinatnem sistemu imamo točki $A(5, 1)$ in $B(2, 3)$. Zapišite vektor $\overrightarrow{AB}$ s koordinatama (komponentama). Izračunajte koordinati točke C na simetrali lihih kvadrantov, da bo veljalo $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

(7 točk)

6. V koordinatnem sistemu je narisan graf neskončnega geometrijskega zaporedja s splošnim členom a_n (prvih pet členov).



Zapišite prva dva člena zaporedja.

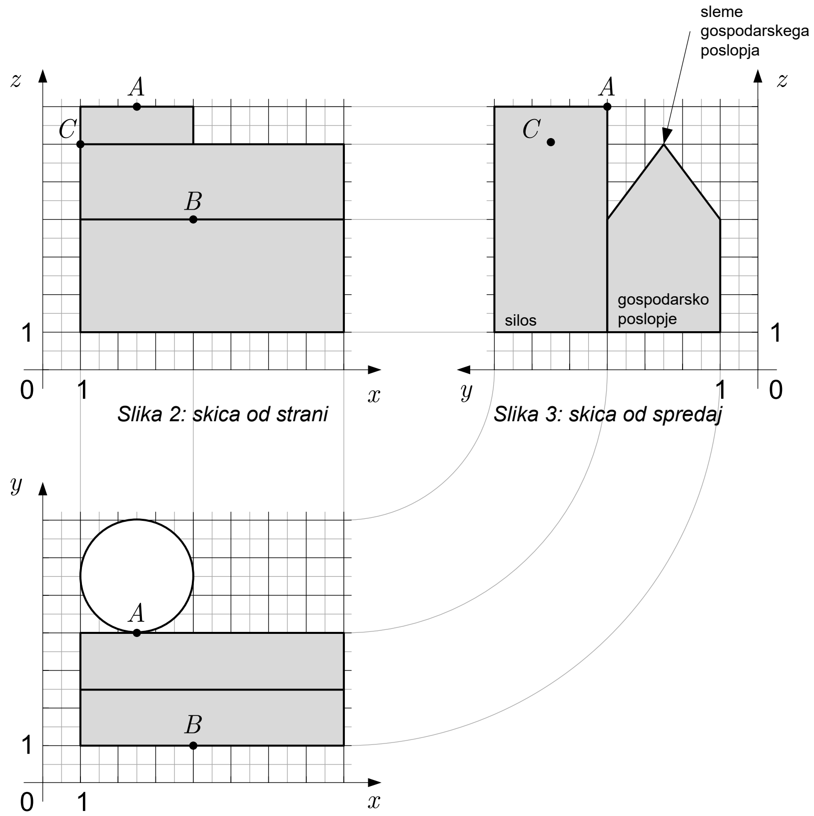
Izračunajte peti člen zaporedja.

Izračunajte najmanjše naravno število n, za katerega je vsota $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ večja od 500 000.

(8 točk)

C) STRUKTURIRANE NALOGE

1. Matjaž je domače gospodarsko poslopje in silos brez strehe slikal s fotoaparatom na dronu z vrha, nato pa še od spredaj in od strani. Na podlagi pridobljenih slik je naredil skico modela gospodarskega poslopja s silosom v treh ravninskih koordinatnih sistemih, in sicer skico z vrha (ravnina xy – slika 1), od spredaj (ravnina yz – slika 3) in od strani (ravnina xz – slika 2).



Slika 2: skica od strani

Slika 3: skica od spredaj

Slika 1: skica z vrha

1.1. Zapišite koordinate točk B in C, če veste, da ima točka A koordinate $A\left(\frac{5}{2}, 4, 7\right)$.

(2 točki)

1.2. Matjaž mora zaradi dezinfekcije prebeliti notranjost silosa. Izračunajte površino notranjih sten in tal silosa. Zunanje mere silosa razberite iz podanih skic, njegove stene in tla pa so debeli 0,1.

(3 točke)

1.3. Izračunajte naklon strehe gospodarskega poslopja.

(2 točki)

1.4. Vrana poleti iz točke A na silosu v točko T na slemenu gospodarskega poslopja. Pri tem opravi pot $\overrightarrow{AT} = \vec{s} = \left(x_0, -\frac{3}{2}, -1\right)$. Kakšne vrednosti lahko zavzame prva koordinata (komponenta) x_0 vektorja $\vec{s}$?

(3 točke)

2. Mečemo nepošten starinski kovanec, ki z verjetnostjo 0,4 pokaže grb.

2.1. Kovanec vržemo šestkrat zapored. Kolikšni sta verjetnosti naslednjih dogodkov?
A: Natanko petkrat v šestih metih se pokaže grb.
B: Vsaj dvakrat v šestih metih se pokaže grb.

(4 točke)

2.2. Peter in Rok izmenično mečeta ta kovanec. Začne Peter. Zmaga tisti, ki prvi vrže grb. Izračunajte verjetnosti dogodkov.
R_1: Rok zmaga s svojim prvim metom.
P_1: Peter zmaga s svojim prvim metom.
P_2: Peter zmaga s svojim drugim metom.
P_3: Peter zmaga s svojim tretjim metom.

Kolikšna je verjetnost, da Peter (tekmovalec, ki meče prvi) zmaga v tej igri?

(6 točk)